27/4/20

Θεώρημα: Έστω R μεταθ. δακτύλιος και F ελεύθερο R-μόδιο (βάση n στοιχεία) $\Rightarrow$ Κάθε βάση του F έχει n στοιχεία.

Ορισμός: Έστω M ελεύθερο R-μόδιο, R μεταθ. Ορίζουμε τάξη του M ($\text{rank}\, M$), το πλήθος των στοιχείων της βάσης του M. (άπειρες βάσεις)

Πρόταση: Έστω M_1, M_2 ελεύθερα R-μόδια $\Rightarrow$ το $M_1 \oplus M_2$ είναι ελεύθερο. και αν ο R μεταθετικός $\Rightarrow$ $\text{rank}(M_1 \oplus M_2) = \text{rank}\, M_1 + \text{rank}\, M_2$

Αποδ: Το M_1 ελεύθερο. Έστω $\{m_1, \dots, m_k\}$ βάση $\Rightarrow M_1 = R^k$ ή $M = \bigoplus_{\rho \in B} R\rho$ B βάση.

Ομοίως, το M_2 ελευθ. Έστω $\{m_1', \dots, m_s'\}$ βάση $\Rightarrow M_2 = R^s$

καθώς $M_1 \oplus M_2 = R^k \oplus R^s = R^{k+s}$ $\rightarrow$ $k+s$ τάξη

$$\underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{k \text{ φορές}} (+) \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{s\text{-φορές}}$$

$\Rightarrow$ το $M_1 \oplus M_2$ ελεύθερο.

Αν ο R μεταθ $\Rightarrow \text{rank}\, R^k = k$

Εφαρμογή

Θεώρημα: Έστω R ΠΚΙ και M ελεύθερο R-μόδιο με $\text{rank}\, M = n$. Τότε, κάθε υπομόδιος $N \leq M$ είναι ελεύθερος με $\text{rank}\, N \leq n$.

Πρόταση: Έστω M ελεύθερος R-μόδιος με τάξη k και $X \subseteq M$.
Αν το X παράγει το M $\Rightarrow |X| \geq k$.

Αποδ: Έστω M ελεύθερο και $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ που παράγει το M $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = M$
$\Rightarrow \{x_1 + IM, \dots, x_n + IM\}$ παράγει του M/IM (δ.χ. R/I)
όπου I μέγιστο ιδεώδες του R.
Άρα, από Γραμ. Άλγεβρα

$$n \geq \dim_{R/I} M/IM = \dim M = k$$

$\Rightarrow n \geq k$.

Το πλήθος του συνόλου των στοιχείων που παράγουν ένα δ.χ. $\geq$ διάσταση του δ.χ.

Θεώρημα (βάσεων):
Έστω R ΠΚΙ και M ελεύθερος R-μόδιος τάξης s και $N \leq M$. Τότε, υπάρχει βάση $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ του M και $d_1, \dots, d_s \in R$ τ.ω. τα μη μηδενικά στοιχεία του $\{d_1\mu_1, \dots, d_s\mu_s\}$ είναι βάση του N και $d_1 | d_2 | \dots | d_s$. $(a | b \Leftrightarrow \exists c : b = ac)$

Θεωρήματα Δομής (Ταξινόμηση Ελεύθερων Μοδίων)
Στόχος: Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο μόδιο υπεράνω ΠΚΙ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα κυκλικών υπομοδίων του.

Κανονική Μορφή Smith

Θεώρημα: Κάθε $s \times t$ πίνακας A με στοιχεία από μια ΠΚΙ R είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ όπου $n = \min\{s, t\}$ και $d_1 | d_2 | \dots | d_n$ $((a | b \Leftrightarrow \exists c : b = a \cdot c,\ a, b, c \in R^*))$
Ο πίνακας $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ καλείται κανονική μορφή Smith του A $(i \neq j = 0$, αν $i = j \to d_i)$

*

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$A \sim B$ αν $\exists X, Y$: $A = XBY$ ισοδύναμοι
αντιστρέψιμοι

Για ισοδύναμους πίνακες επιτρέπεται:
στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ γραμμών / στηλών

* Τα d_i είναι μοναδικά ως προς "συντροφικότητα" στοιχείων. Δηλαδή, αν $diag(d_1, \dots, d_n)$ και μορφή Smith του A ⇒ κάθε άλλη κανονική μορφή Smith του A έχει τη μορφή $diag(cd_1, \dots, cd_n)$

Π.χ. $R = \mathbb{Z}$
όπου τα μόνα αντιστρ. είναι τα ± 1

$$A = \left(\quad \cdots \quad \right) \xrightarrow{\text{Smith}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

όλες οι smith $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix}$

Για ισοδύναμους πίνακες επιτρέπεται:
(στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ γραμμών / στηλών

1) $A \sim$ με πίνακα που προκύπτει εναλλάσοντας την i-γραμμή με j-γραμμή (αντίστοιχα στήλες)
2) $A \sim$ πολ/σμός μίας i-γραμμής (i-στήλης) με ένα $u \in R$, $u \neq 0_R$
3) $A \sim$ προσθέσουμε σε μία i-γραμμή του A ένα u-πολλαπλάσιο της j-γραμμής $(i \neq j)$ (αντίστοιχα για στήλες)

Ιδιότητα: Αν R ΠΚΙ και $a, \beta \overset{\neq 0}{} \in R$ και $\delta = \text{μκδ}(a, \beta)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & \beta \\ * & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} a & * \\ \beta & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \delta & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

αποδ $\delta = \text{μκδ}(a,\beta) \Rightarrow \delta = ax + \beta y \in R$

$a = \delta \cdot a'$ και $\beta = \delta . \beta'$

άρα $\delta = \delta a' x + \delta \beta' y \Rightarrow 1 = a'x + \beta' y$

θεωρώ τον πίνακα

$$\det\begin{pmatrix} x & -\beta' \\ y & a' \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -\beta' \\ y & a' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & \beta' \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Παρατηρώ:

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -\beta' \\ y & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+\beta y & -a\beta' + a'\beta \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

πχ Έστω $R = \mathbb{Z}$

Θα υπολογίσω κανονική μορφή Smith

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 17 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 14 & 10 & -2 \\ 17 & 10 & 13 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 10 & 14 \\ 13 & 10 & 17 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{r_4 \to r_4 - 9r_1 \\ \text{πολ/σια του } 2}]{\substack{r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 13r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 14 & 20 \\ 0 & -16 & -22 \\ 0 & -14 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - 3\Sigma_1]{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 20 \\ 0 & -16 & -22 \\ 0 & -14 & -20 \end{pmatrix}, \quad a = 14, \; \beta = 20, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -\beta' \\ 0 & y & a' \end{pmatrix}$$

$\delta = \text{μκδ}(14, 20) = 2$

$2 = 14 \cdot 3 + 20(-2)$

και $a' = \frac{14}{2} = 7$, $\beta' = \frac{20}{2} = 10$

Άρα $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 20 \\ 0 & -16 & -22 \\ 0 & -14 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} (\pm)1 & 0 & 0 \\ 0 & (\pm)2 & 0 \\ 0 & 0 & (\pm)6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Κανονική μορφή Smith του A.